

10. Si $\alpha = \alpha'$, $AD \parallel BC$, $BE \parallel AC$ (fig.52).

Prueba que: $\beta = \beta'$

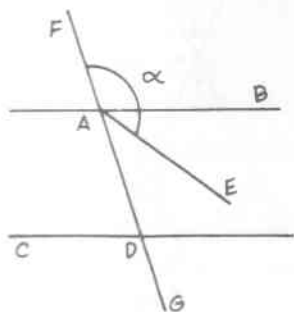


Fig. 51

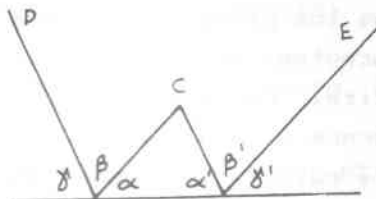


Fig. 52

11. Si los ángulos γ y δ (fig. 53) miden 104° y 76° respectivamente, qué puedes decir de las rectas r y s . Justifica tu respuesta.



Fig. 53

12. Si $\angle AOB = \angle OBC$ (fig. 54), DO y BE son sus bisectrices respectivas. Demuestra que: $DO \parallel BE$.
13. Si $\angle 7 + \angle 9 = 180^\circ$ y $\angle 2 = \angle 8$ (fig. 55). Prueba que: $AB \parallel CD$ y $EB \parallel FG$.

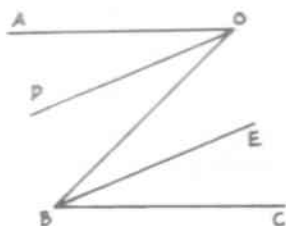


Fig. 54

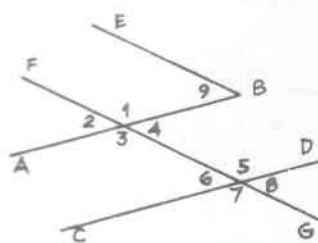


Fig. 55

14. Determina si es posible construir un triángulo con tres segmentos que miden respectivamente:
- a) 5, 12 y 4 cm
 - b) 23, 36 y 50 cm
 - c) 21, 4; 8, 13 y 17 m
 - d) 4, 8 y 13 cm

15. En la figura 56, D es un punto cualquiera interior al $\triangle ABC$, l , m y n sus distancias a los v rtices. Prueba que:
 $a + b + c < 2(l + m + n)$

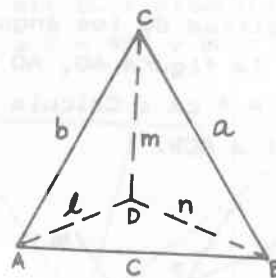


Fig. 56

16. Los ángulos interiores de un triángulo miden respectivamente x , $2x$, $3x$. Calcula las amplitudes de los mismos.
17.  Cu ntos ángulos rectos puede tener un triángulo?  Cu ntos obtusos?  Por qué?
18. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos es el doble del otro.  Cu nto miden los ángulos agudos de dicho triángulo?
19. Si los ángulos agudos de un triángulo rectángulo miden respectivamente $2x + 30^\circ$ y $3x + 15^\circ$, calcula el valor de dichos ángulos.
20. La amplitud del ángulo principal de un triángulo isósceles es la mitad de la amplitud de los ángulos bases. Calcula la amplitud de estos ángulos.
21. En la figura 57, Prueba que $\alpha' + \gamma' = 180^\circ + \beta$
22. La suma de las amplitudes de dos ángulos exteriores de un triángulo es de 258° . Cual es la amplitud del ángulo interior que no es adyacente a ninguno de estos dos ángulos exteriores.
23. En la figura 58 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AH} \parallel \overline{DG}$, $\angle A = 35^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Calcula α y β

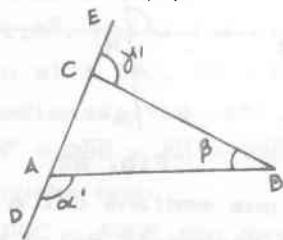


Fig. 57

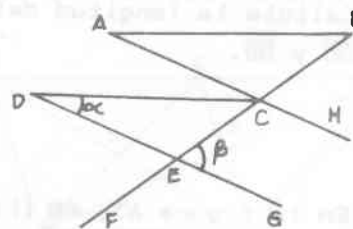


Fig. 58

24. Sean h y r dos rectas paralelas (fig. 59). Calcula la amplitud de los ángulos α y β
25. En la figura 60, $AD \parallel EF$, $\delta = 60^\circ$, $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$. Calcula la longitud del $\overline{AC}$ y la amplitud del $\angle ACB$.

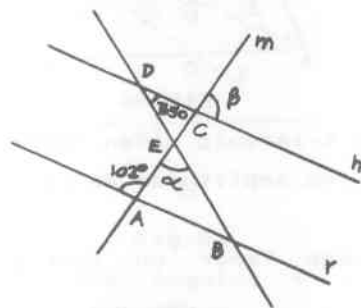


Fig. 59

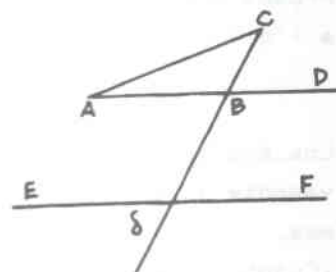


Fig. 60

26. En la figura 61,
 $r \perp s$, $r' \perp s$
 $\theta = 42^\circ$
 $\overline{CB} = 4,0 \text{ cm}$
 Calcula: $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

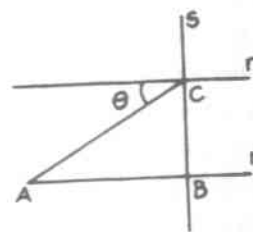


Fig. 61

27. Sea $AB \parallel EF$ (fig. 62), sabiendo que $\overline{DC}$ es una mediana del $\triangle ABD$,
 $\overline{AB} = 8,0 \text{ cm}$
 $\angle ADC = 30^\circ$
 $\angle EHC = 100^\circ$
 Calcula la longitud del $\overline{DC}$ y $\overline{DB}$.

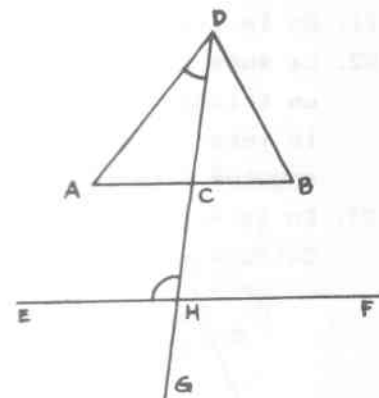


Fig. 62

28. En la figura 63, $AB \parallel CD$, $\overline{EF}$ una mediana del $\triangle AEB$, $\overline{AB} = 8,0 \text{ cm}$; $\angle FBE = 30^\circ$ y $\overline{EB}$ bisectriz del $\angle FED$. Calcula la longitud de $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$.

29. Calcula $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\angle A$ (fig. 64) si: $\overline{BC}$: bisectriz del $\angle FBE$, $\overline{AB}$ bisectriz de $\angle FBD$, $\angle C = 40^\circ$ y $\overline{BC} = 5,2$ cm

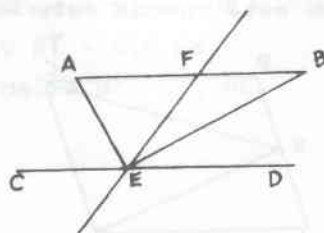


Fig. 63

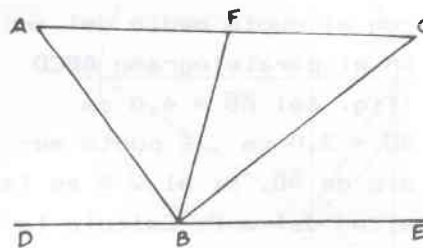


Fig. 64

30. Halla la amplitud de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo, si la altura sobre la hipotenusa divide a ésta en segmentos que están en la razón 1:3
31. Dado un paralelogramo de 5 y 8 cm de lado, si uno de sus ángulos mide 60° , calcula la longitud de los lados del paralelogramo que se forma al unir los puntos medios de sus lados.
32. Si en un cuadrilátero ABCD, $\angle A = 3x$, $\angle B = \frac{13x}{3}$, $\angle C = \frac{53x}{5}$ y $\angle D = \frac{91x}{15}$, halla la amplitud de dichos ángulos.
33. En un paralelogramo, ¿qué relación existe entre dos ángulos consecutivos?, ¿y entre dos ángulos opuestos?
34. A y B son dos ángulos consecutivos de un paralelogramo. Si $\angle A = 4x$ y $\angle B = 5x$. ¿Cuánto miden los ángulos de dicho paralelogramo?
35. Dos ángulos opuestos de un paralelogramo miden $2x + 10^\circ$ y $3x - 15^\circ$. ¿Cuánto miden sus ángulos?
36. Si en un trapecio isósceles uno de sus ángulos mide $71,5^\circ$. Halla los restantes.

37. En el ΔABC , $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ medianas (fig. 65), $\overline{BF} = 2\overline{BD}$ y $\overline{AG} = 2\overline{AE}$. Prueba que: $\overline{ABGC}$ y $\overline{ABCF}$ son paralelogramos.

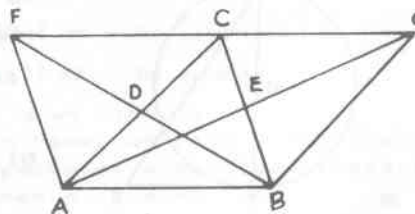


Fig. 65

38. En una circunferencia de radio $r = 4,0$ cm se tiene una cuerda de $2,0$ cm. Halla la longitud del segmento que se obtiene al unir uno de los extremos de la cuerda con el punto medio del arco que esta cuerda determina.

39. En el paralelogramo ABCD (fig. 66) $\overline{AB} = 4,0$ cm $\overline{AD} = 3,0$ cm, E punto medio de $\overline{AD}$. Si el $\angle A$ es la mitad del $\angle D$. Calcula la longitud de $\overline{EC}$ y $\overline{EB}$.

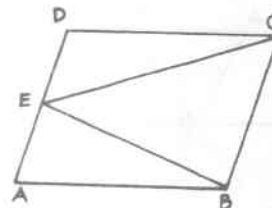


Fig. 66

40. El cuadrado ABCD tiene $3,0$ cm de lado (fig. 67), $\overline{AF} = \frac{1}{3} \overline{AB}$ $\overline{DG} = \frac{2}{3} \overline{DC}$, E: punto medio de $\overline{AD}$.

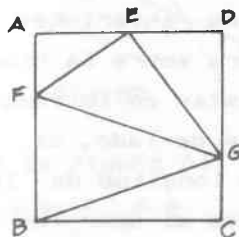


Fig. 67

Prueba que: $\triangle FBG$ es isósceles

41. El rombo MNPQ tiene $6,0$ cm de lado, (fig. 68)

$$\angle P = 60^\circ$$

E: punto medio de $\overline{NP}$

Calcula: $\overline{ME}$, $\overline{MP}$ y $\angle EMP$

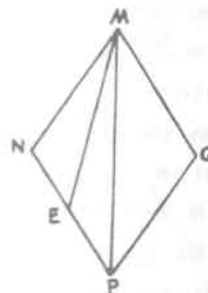


Fig. 68

- 42.

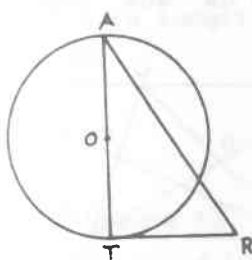


Fig. 69

En la figura 69 $\overline{RT}$ es tangente a la circunferencia de radio $\overline{OA}$. Si :

- a) $\overline{RT} = 12$ cm, $\angle A = 35^\circ$
Halla $\overline{RA}$, $\overline{OA}$ y $\angle R$
b) $\overline{OT} = 5,0$ cm, $\overline{RT} = 8,0$ cm
Halla: $\angle A$, $\overline{RA}$ y $\angle R$

43. Si $\overline{QT}$ es tangente a la circunferencia de centro O (fig. 70). $\overline{BT}$: diámetro, $\overline{QC} = 4,0$ cm, $\overline{QB} = 9,0$ cm y $\overline{BT} = 6,0$ cm. Halla $\overline{QT}$, $\overline{CT}$, $\overline{BC}$.

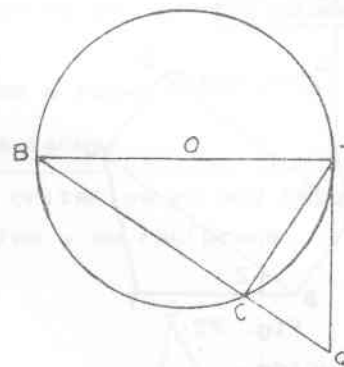


Fig. 70

8. Igualdad y semejanza de triángulos

Para demostrar la igualdad (congruencia) de triángulos nos apoyamos en los siguientes criterios de igualdad.

Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales:

- un lado y los ángulos adyacentes a ese lado (a.l.a.), o
- dos lados y el ángulo comprendido (l.a.l.), o
- sus tres lados (l.l.l.)

Ejemplo 1

Si $ABCD$ es un paralelogramo (fig. 71) y $EC \parallel AF$.
Prueba que: $\triangle ABF = \triangle CDE$.

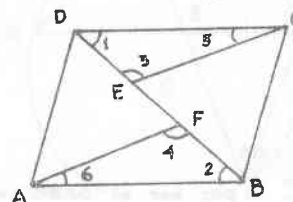


Fig. 71

Resolución

$\overline{AB} = \overline{DC}$ por lados opuestos del paralelogramo $ABCD$
 $\angle 1 = \angle 2$ por alternos entre $AB \parallel CD$ y DB secante
 $\angle 3 = \angle 4$ por alternos entre $BC \parallel AF$ y DB secante
 $\angle 5 = \angle 6$ por terceros ángulos de un triángulo
 por tanto $\triangle ABF = \triangle CDE$ por tener un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales. $\square$

Ejemplo 2

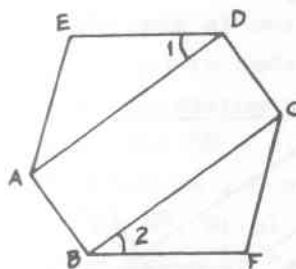


Fig. 72

Demuestra que: $\triangle ADE = \triangle BCF$
(fig. 72) si sabes que ABCD es
un rectángulo, $\overline{ED} \parallel \overline{BF}$ y
 $\overline{ED} = \overline{BF}$.

Resolución

$\overline{AD} = \overline{BC}$ por ser lados opuestos de un rectángulo
 $\angle 1 = \angle 2$ por ser ángulos agudos que tienen sus lados
respectivamente paralelos
 $\overline{ED} = \overline{BF}$ por datos
luego $\triangle ADE = \triangle BCF$ por tener respectivamente iguales
dos lados y el ángulo comprendido. ■

Ejemplo 3

En el $\triangle ABC$ isósceles de base
 $\overline{AB}$ (fig. 73) se tiene que:

$$\overline{AD} = \overline{BE}$$

Prueba que:

$$\triangle AEC = \triangle BCD$$

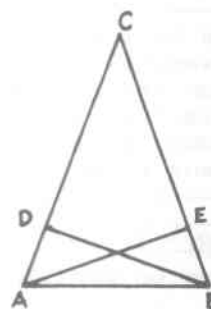


Fig. 73

Resolución

$\overline{AC} = \overline{BC}$ por ser el $\triangle ABC$ isósceles de base $\overline{AB}$
 $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{BE} + \overline{EC}$ (1) por suma de segmentos
 $\overline{AD} = \overline{BE}$ (2) por datos

de (1) y (2) tenemos: $\overline{DC} = \overline{EC}$

$\angle BCD = \angle ACE$ por ángulo común
por tanto $\triangle AEC = \triangle BCD$ por tener respectivamente igua-
les dos lados y el ángulo com-
prendido. ■

Al igual que en la igualdad de triángulos para la seme-
janza existen criterios que nos permiten demostrar esta.

Dos triángulos son semejantes si tienen respectivamente:

- iguales dos ángulos, o
- proporcionales dos lados e igual el ángulo comprendido, o
- proporcionales los tres lados.

Para la aplicación de estos criterios es muy importante el teorema de las transversales y su recíproco.

Si $a \parallel b$, r y r' transversales que se cortan en O (fig. 74) entonces:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

y

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$$

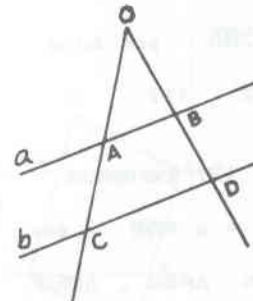


Fig. 74

Ejemplo 4

En la figura 75, $BC \parallel MN$, A, C, M y N puntos de la circunferencia.

- Prueba que: $\triangle CME \sim \triangle ABC$
- Establece la proporcionalidad entre los lados homólogos.

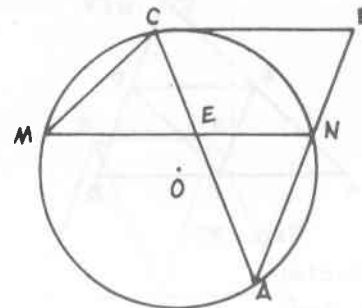


Fig. 75

Resolución

- En los triángulos CME y ABC tenemos:

$$\angle BCA = \angle CEM \quad \text{por alternos entre } \overline{BC} \parallel \overline{MN} \text{ y } \overline{BA} \text{ secante}$$

$$\angle CMN = \angle CAN \quad \text{por estar inscritos en el mismo arco}$$

por tanto $\triangle CME \sim \triangle ABC$ por tener respectivamente iguales dos ángulos

$$b) \frac{AB}{CM} = \frac{AC}{ME} = \frac{BC}{CE} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 5

En el $\triangle ABC$ (fig. 76) si

$$\overline{AG} = 2\overline{GD} \quad \text{y}$$

$$\overline{BG} = 2\overline{GE}$$

Prueba que:

$$\triangle ABG \sim \triangle DEG$$

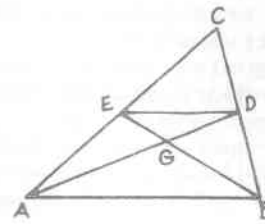


Fig. 76

Resolución

$$\overline{AG} = 2\overline{GD} \quad \text{por datos}$$

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = 2 \quad (1)$$

$$\overline{BG} = 2\overline{GE} \quad \text{por datos}$$

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GE}} = 2 \quad (2)$$

de (1) y (2) tenemos

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GE}}$$

$$\angle EGD = \angle AGB \quad \text{por opuestos por el vértice}$$

por tanto $\triangle ABG \sim \triangle DEG$

por tener respectivamente proporcionales dos lados e igual el ángulo comprendido. ■

Ejemplo 6

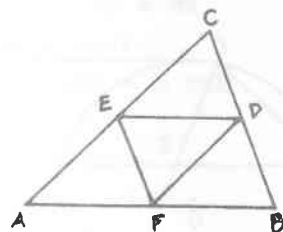


Fig. 77

Si D, E y F son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ del $\triangle ABC$ (fig. 77).

Prueba que:

$$\triangle DEF \sim \triangle ABC$$

Resolución

Si los puntos D, E y F son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ del $\triangle ABC$ entonces $\overline{ED}$, $\overline{DF}$ y $\overline{FE}$ son paralelas medias en el $\triangle ABC$ (punto 22 del Memento), luego se cumple:

$$\overline{ED} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

$$\overline{DF} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

$$\overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

$$\text{de donde} \quad \frac{\overline{ED}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$$

por tanto $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ por tener respectivamente proporcionales sus tres lados ■

Ejercicios (epígrafe B)

1. En la figura 78, $\overline{AG}$ y $\overline{HD}$ medianas, $\overline{FB} = \overline{EC}$, $\overline{FB} \parallel \overline{EC}$, $\overline{AH} = \overline{GD}$. Prueba que: $\triangle AGF = \triangle CDH$ y $\triangle AGB = \triangle DEH$
2. Si $ABCD$ y $AFCE$ son paralelogramos (fig. 79), prueba que: $\triangle ABF = \triangle CDE$

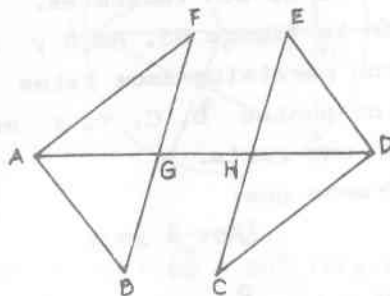


Fig. 78

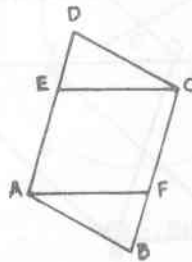


Fig. 79

3. En la figura 80, $ABCD$ trapecio isósceles, $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$, E punto medio de $\overline{AB}$. Prueba que:
 Los triángulos AED , EBC , ECD son iguales e isósceles.

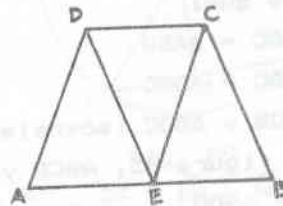


Fig. 80

4. $ABCD$ es un cuadrado (fig. 81), E punto medio de $\overline{AB}$. Prueba que: $\triangle DEC$ es isósceles.

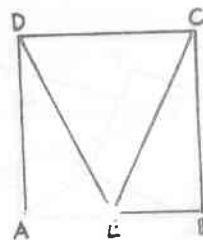


Fig. 81